EC-1251

Sep-Dic 2008

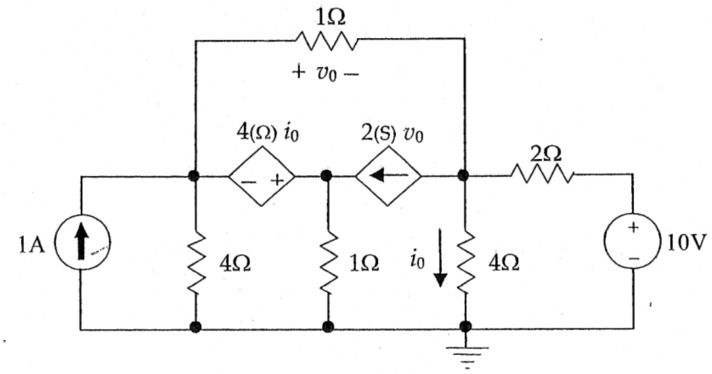
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL (28 %)

Problema 1 (14 ptos.)

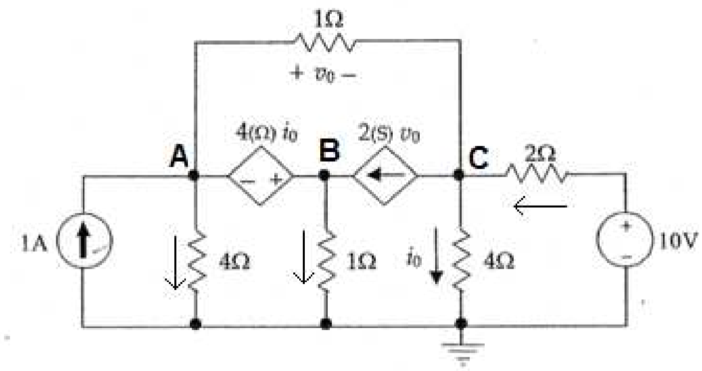
Para el circuito que se muestra se pide:

a) **Aplique el método de nodos** para definir las ecuaciones que le permitan determinar todas las incógnitas de voltajes y corrientes. **Exprese su respuesta en forma matricial.** (7 ptos.)

b) **Aplique el método de mallas** para definir las ecuaciones que le permitan determinar todas las incógnitas de voltajes y corrientes. **Exprese su respuesta en forma matricial.** (7 ptos.)



a) Por nodos:



$$V_O = V_A - V_C \tag{1}$$

$$4i_O = V_B - V_A \Rightarrow i_O = \frac{V_B - V_A}{4} \tag{2}$$

$$i_O = \frac{V_C}{4} \tag{3}$$

Sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (2) se obtiene que:

$$V_C = V_B - V_A \Rightarrow -V_A + V_B - V_C = 0 \tag{4}$$

Sustituyendo la ecuación (4) en (1) se obtiene el voltaje Vo en función de los voltajes de nodo A y B:

$$V_O = V_A - V_B + V_A = 2V_A - V_B \tag{5}$$

Por LKC en el supernodo (A, B y la fuente dependiente 4io) se obtiene que:

$$1 + 2V_O = \frac{V_O}{1} + \frac{V_A}{4} + \frac{V_B}{1} \Rightarrow 4 + 8V_O = 4V_O + V_A + 4V_B$$

$$\Rightarrow -4V_O + V_A + 4V_B - 4 = 0 \tag{6}$$

Sustituyendo la ecuación (5) en la ecuación (6) se obtiene que:

$$-8V_A + 4V_B + V_A + 4V_B - 4 = 0$$

$$\Rightarrow -7V_A + 8V_B = 4 \tag{7}$$

Por LKC en el nodo C:

$$\frac{V_O}{1} + \frac{10 - V_C}{2} = 2V_O + i_O \Rightarrow 2V_O + 10 - V_C = 4V_O + 2i_O$$

$$2V_O + 2i_O + V_C - 10 = 0 \tag{8}$$

Sustituyendo las ecuaciones (5) y (2) en la ecuación (8) se obtiene que:

$$4V_A - 2V_B + \frac{V_B - V_A}{2} + V_C - 10 = 0$$
$$\Rightarrow 8V_A - 4V_B + V_B - V_A + 2V_C - 20 = 0$$

$$\Rightarrow 7V_A - 3V_B + 2V_C = 20 \tag{9}$$

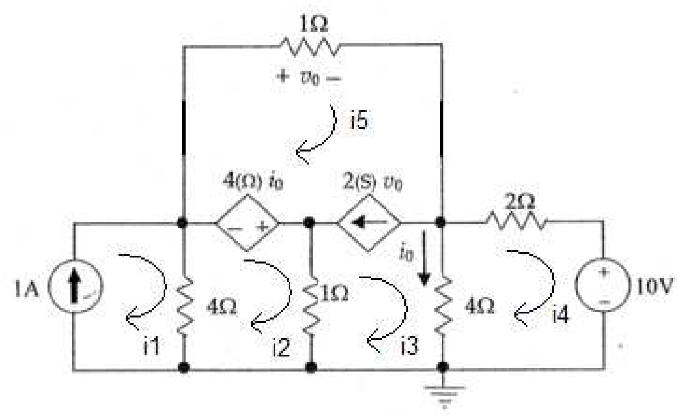
El sistema de ecuaciones a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} -7V_A + 8V_B = 4 \\ 7V_A - 3V_B + 2V_C = 20 \\ -V_A + V_B - V_C = 0 \end{cases}$$

O de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -7 & 8 & 0 \\ 7 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Por mallas:



$$V_O = 1 \cdot i_5 = i_5 \tag{10}$$

$$i_O = i_3 - i_4 \tag{11}$$

$$2V_O = i_5 - i_3 \tag{12}$$

$$i_1 = 1A \tag{13}$$

Sustituyendo la ecuación (10) en (12) se obtiene que:

$$2i_5 = i_5 - i_3 \Rightarrow i_5 = -i_3 \tag{14}$$

Para la supermalla:

$$V_O + 4i_O + 1(i_3 - i_2) + 4i_O = 0$$

$$\Rightarrow V_O + 8i_O + i_3 - i_2 = 0 \tag{15}$$

Sustituyendo las ecuaciones (10) y (11) en la ecuación (15) se obtiene que:

$$-i_3 + 8i_3 - 8i_4 + i_3 - i_2 = 0$$

$$-i_2 + 8i_3 - 8i_4 = 0 \tag{16}$$

Para la malla 4:

$$6i_4 - 4i_3 + 10 = 0 \tag{17}$$

Para la malla 2:

$$-4i_O + 5i_2 - i_3 - 4 = 0 \tag{18}$$

Sustituyendo la ecuación (11) en la ecuación (18) se obtiene que:

$$-4i_3 + 4i_4 + 5i_2 - i_3 = 4$$

$$\Rightarrow 5i_2 - 5i_3 + 4i_4 = 4 \tag{19}$$

El sistema de ecuaciones a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} -i_2 + 8i_3 - 8i_4 = 0 \\ -4i_3 + 6i_4 = -10 \\ 5i_2 - 5i_3 + 4i_4 = 4 \end{cases}$$

O de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -1 & 8 & -8 \\ 0 & -4 & 6 \\ 5 & -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Para validar la solución del ejercicio se introdujeron ambas matrices en Matlab y se obtuvo:

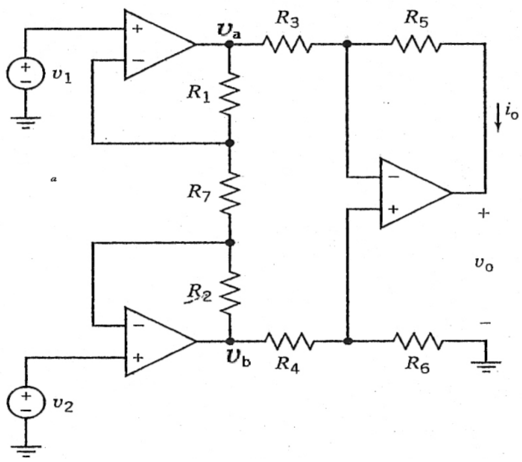
```
clc
clear all
%Mallas
% -1*I2+8*I3-8*I4=0
% +5*I2-5*I3-8*I4=4
% +0*I2-4*I3+6*I4=-10

Am=[-1,8,-8;    5,-5,4;    0,-4,6];
Bm=[0;   4;   -10];

Xm=Am\Bm;

% Va=4*(1-I2)
% Vb=1*(I2-I3)
% Vc=4*(I3-I4)

Va_m=4*(1-Xm(1));
Vb_m=1*(Xm(1)-Xm(2));
Vc_m=4*(Xm(2)-Xm(3));

%Nodos
% -7*Va+8*Vb+0*Vc=4
% +7*Va-3*Vb+2*Vc=20
% -1*Va+1*Vb-1*Vc=0
An=[-7,8,0;    7,-3,2;    -1,1,-1];
Bn=[4;   20;   0];

Xn=An\Bn;
Va_n=Xn(1);
Vb_n=Xn(2);
Vc_n=Xn(3);

% Resultados por Mallas:
% Va_m=4.9697
% Vb_m=4.8485
% Vc_m=-0.1212
```

```
% Resultados por Nodos:
% Va_n=4.9697
% Vb_n=4.8485
% Vc_n=-0.1212
```

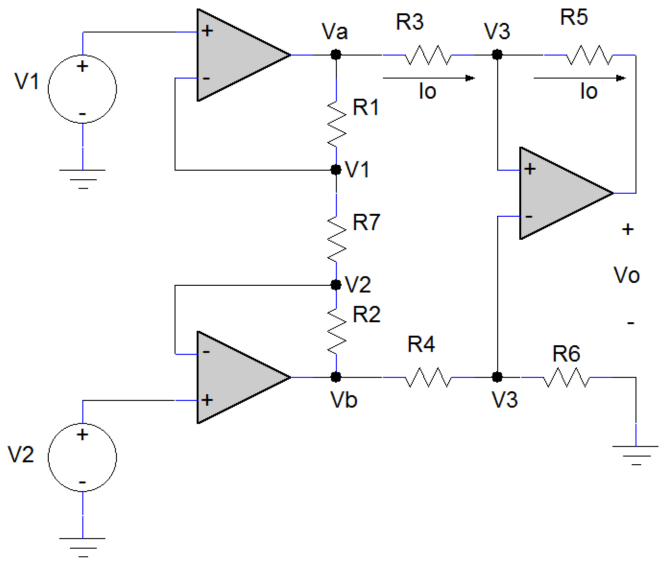
Con lo que se corrobora la validez de la solución del ejercicio.

Problema 2 (7 ptos.)

Para el circuito que se muestra, con OPAM's ideales, **determine v**o **e i**o en función de las señales de entrada (v1, v2) y de los elementos resistivos del circuito. Si $R_7 = 2 R_1 = 2 R_2$, $R_4 = R_6$, $R_3 = R_5$.



En este circuito se tienen dos operacionales en configuración no inversora (1 y 2) y un operacional en configuración diferencial (3).



Recordemos que para la configuración no inversora:

$$V_{out} = V_{in}\left(\frac{R_f}{R_1} + 1\right) \tag{1}$$

Y que para la configuración diferencial:

$$V_{out} = \frac{R_2}{R_1}(V_2 - V_1) \tag{2}$$

Buscando las expresiones de las incógnitas Vo, Io se tiene que:

$$-V_a + (R_3 + R_5)i_o + V_o = 0$$

$$\Rightarrow V_o = V_a - (R_3 + R_5)\cdot i_o \tag{3}$$

$$i_o = \frac{V_a - V_3}{R_3} \tag{4}$$

Aplicando divisor de voltaje en la rama conformada por Vb, R4 y R6, se obtiene V3:

$$V_3 = \frac{V_b \cdot R_6}{R_4 + R_6} \tag{5}$$

Sustituyendo R4=R6 en la ecuación (5) se obtiene que:

$$V_3 = \frac{V_b \cdot R_4}{2R_4} = \frac{V_b}{2} \tag{6}$$

Por LKC:

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R_7} = \frac{V_2 - V_b}{R_2} \Rightarrow \frac{V_b}{R_2} = V_2\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_7}\right) - \frac{V_1}{R_7}$$

$$\Rightarrow V_b = V_2 \cdot \frac{(R_2 + R_7)}{R_7} - V1 \cdot \frac{R_2}{R_7} \tag{7}$$

SustituyendoR7=2 R1=2R2 en la ecuación (7) se tiene que:

$$V_b = V_2 \cdot \frac{(R_1 + 2R_1)}{2R_1} - V_1 \cdot \frac{R_1}{2R_1} = \frac{3}{2}V_2 - \frac{1}{2}V_1 \tag{8}$$

Por LKC se tiene que:

$$I = \frac{V_a - V_1}{R_1} = \frac{V_1 - V_2}{R_7} \Rightarrow \frac{V_a}{R_1} = V_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_7}\right) - \frac{V_2}{R_7}$$

$$\Rightarrow V_a = V_1 \cdot \frac{(R_1 + R_7)}{R_7} - V_2 \cdot \frac{R_1}{R_7} \tag{9}$$

Sustituyendo R7=2R1=2R2 en la ecuación (9) se tiene que:

$$V_a = V_1 \cdot \frac{(R_1 + 2R_1)}{2R_1} - V_2 \cdot \frac{R_1}{2R_1} = \frac{3}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_2 \tag{10}$$

Sustituyendo la expresión dada en (8) en la ecuación (6) se tiene que:

$$V_3 = \frac{3V_2 - V_1}{4} \qquad (11)$$

Sustituyendo las ecuaciones (11) y (10) en (4) se obtiene:

$$io = \frac{3V_1 - V_2}{2R_3} - \frac{(3V_2 - V_1)}{4R_3} = \frac{6V_1 - 2V_2 - 3V_2 + V_1}{4R_3} = \frac{7V_1 - 5V_2}{4R_3} \qquad (12)$$

Sustituyendo las ecuaciones (12) y (10) en (3) se tiene que:

$$Vo = \frac{3}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_2 - 2R_3 \cdot \frac{(7V_1 - 5V_2)}{4R_3} = \frac{3V_1 - V_2 - 7V_1 + 5V_2}{2} = \frac{4V_2 - 4V_1}{2} = 2(V_2 - V_1)$$

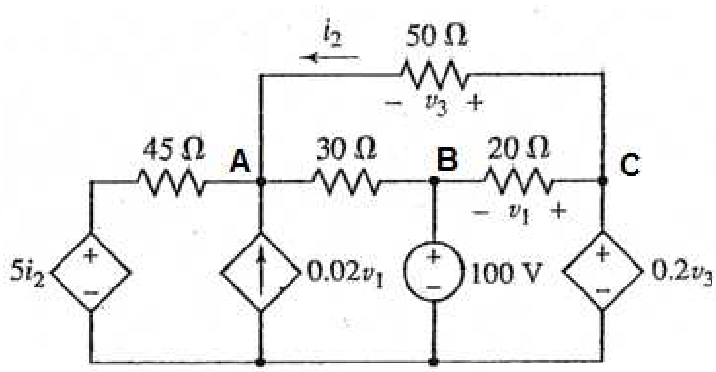
Finalmente concluimos que:

$$V_o = 2(V_2 - V_1)$$

$$i_o = \frac{7V_1 - 5V_2}{4R_3}$$

Problema 3 (7 ptos.)

Para el circuito que se muestra determine el voltaje v1 y la corriente i2.



Recorriendo la malla conformada por los nodos B, C y referencia se obtiene que:

$$-100 - V_1 + 0.2V_3 = 0 \Rightarrow V_1 = 0.2V_3 - 100 \qquad (1)$$

Buscando la expresión para la otra incógnita (i2) obtenemos que:

$$i_2 = \frac{V_3}{50} \tag{2}$$

Pero recorriendo la malla conformada por los nodos ACB se obtiene:

$$V_3 = 0.2V_3 - V_A \Rightarrow V_3 = -\frac{V_A}{0.8} \tag{3}$$

Sustituyendo la expresión dada por (3) en la ecuación (2) se obtiene que:

$$i_2 = -\frac{V_A}{40} \tag{4}$$

Reemplazando el valor obtenido en la ecuación (3) en la ecuación (1) se obtiene que:

$$V_1 = -0.25V_A - 100 \tag{5}$$

Para ambas incógnitas (V1 e i2) observamos que es necesario determinar V_A. Por LKC en el nodo A se obtiene que:

$$\frac{5i_2 - V_A}{45} + 0.02V_1 + i_2 = \frac{V_A - 100}{30}$$
$$\Rightarrow 10i_2 - 2V_A + 1.8V_1 + 90i_2 = 3V_A - 300$$

$$\Rightarrow 100i_2 - 5V_A + 1.8V_1 + 300 = 0 \tag{6}$$

Sustituyendo las expresiones dadas por (4) y (5) en la ecuación (6) tenemos que:

$$-2.5V_A - 5V_A + 1.8(-0.25V_A - 100) + 300 = 0$$
$$\Rightarrow -2.5V_A - 5V_A - 0.45V_A - 180 + 300 = 0$$
$$\Rightarrow -7.95V_A + 120 = 0$$
$$\Rightarrow V_A = \frac{120}{7.95} = 15.094[V]$$

Sustituyendo el valor de V_A en (4) se obtiene que:

$$i2 = -0.3774[A] \tag{7}$$

Finalmente sustituyendo el valor de V_A en (5) obtenemos que:

$$V_1 = -103.774[V] \tag{8}$$